Inferencia Estadística (M0.155)

Primera Prueba de Evaluación Continua

2026-11-01

Ejercicio 1 (3 puntos)

Un criadero de ratones de laboratorio trabaja con camadas de exactamente dos crías. Se estudia la transmisión mendeliana de un alelo mutante A. Uno de los progenitores es heterocigoto (Aa) y el otro es homocigoto para el alelo normal (aa). Por tanto, cada cría tiene una probabilidad de $1/2$ de heredar el alelo mutante A, independientemente de la otra.

El genotipado de cada cría se realiza un día laborable (lunes a viernes) elegido al azar, con los cinco días equiprobables e independientes entre crías y respecto al genotipo.

a) El técnico informa de que al menos una de las dos crías es portadora y fue genotipada en lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean portadoras?

b) Ahora el técnico elige al azar una de las dos crías y comprueba que es portadora y fue genotipada en lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean portadoras?

c) Explica por qué a) y b) dan resultados distintos.

Ejercicio 2 (3 puntos)

En un laboratorio se estudia el crecimiento de colonias bacterianas en placas de cultivo. En las condiciones habituales, el número de colonias por placa presenta variabilidad y puede describirse mediante una distribución de Poisson de media 1,5. Denotamos este número por X, de modo que $X \sim \text{Poisson}(1{,}5)$. Supondremos que los recuentos obtenidos en placas distintas son independientes.

a) Para una placa, calcula $P(X = 0)$ y $P(X \geq 3)$.

b) Se preparan cinco placas. Calcula la probabilidad de que el número total de colonias sea como máximo cinco. Justifica la distribución del total.

c) El laboratorio utiliza dos incubadoras. El 60 % de las placas se incuban en la incubadora 1, donde el número de colonias por placa sigue una $\text{Poisson}(1{,}5)$. El 40 % restante se incuba en la incubadora 2, que tiene un fallo de esterilización y produce una $\text{Poisson}(3)$. Cuando se utiliza una misma incubadora, el resultado de una placa no influye en el de las demás.

Se elige una placa al azar, sin saber en qué incubadora estuvo, y se cuentan cuatro colonias.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que la placa proceda de la incubadora 2?

ii) Se toma otra placa de la misma incubadora que la anterior, sin saber cuál es. ¿Cuál es la probabilidad de que no presente ninguna colonia, teniendo en cuenta que en la primera se observaron cuatro?

Ejercicio 3 (4 puntos)

En un estudio se miden dos biomarcadores, X e Y, en cada individuo. Como son variables continuas y pueden estar relacionadas, se ha optado por describir su comportamiento conjunto mediante una distribución normal bivariante. Los modelos marginales son normales con la media y desviación típica que se indican.

$$X \sim N(100, 15^2), \qquad Y \sim N(120, 20^2),$$

y el coeficiente de correlación entre ambos biomarcadores es $\rho = 0{,}6$.

a) Determina la distribución de $Y \mid X = x$. Calcula $P(Y > 140 \mid X = 110)$.

b) Calcula $P(Y > X)$.

c) Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$. ¿Son X e Y independientes? Encuentra el valor de a para que X y $V = Y - aX$ sean independientes.

d) Se clasifica a los individuos según Y en tres categorías: bajo ($Y < 100$), normal ($100 \leq Y \leq 140$) y alto ($Y > 140$). Se seleccionan diez individuos de forma independiente. Calcula la probabilidad de observar exactamente dos bajos, seis normales y dos altos.

e) En una muestra de 400 individuos seleccionados de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos 75 tengan $Y > 140$? Justifica la aproximación utilizada.